

18 Mon beau sapin

Corrigé Mobiliser et organiser ses connaissances.

Le tronc de sapin de la photographie ci-dessous a un diamètre $D = 30$ cm, une longueur $\ell = 5,0$ m et il est immergé d'une hauteur $h = 15$ cm.



21 Souffle au cœur

Exploiter des informations ; mobiliser et organiser ses connaissances ; effectuer des calculs.

L'aorte thoracique est une artère qui transporte le sang chargé de dioxygène à partir du cœur vers les organes ; l'aorte est considérée comme cylindrique de diamètre D .

Un patient présente une sténose aortique congénitale : dès sa naissance, son aorte présentait un rétrécissement anormal de diamètre d égal à un cinquième du diamètre D .

Ce patient, lors de l'auscultation, a un pouls de 70 pulsations par minute. À chaque pulsation cardiaque, le cœur du patient envoie $V = 75$ cm³ de sang, liquide incompressible, dans l'aorte.



1. Schématiser la situation.
2. Exprimer la valeur de la poussée d'Archimède s'exerçant sur le tronc supposé cylindrique.
3. Rappeler le principe d'inertie en l'appliquant au tronc dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen.
4. Le bois du sapin de la photographie ci-avant est-il sec ou vert ?

Données

- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81$ N · kg⁻¹.
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3$ kg · m⁻³.
- Masse volumique du sapin sec : $\rho_1 = 400$ à 580 kg · m⁻³.
- Masse volumique du sapin vert : $\rho_2 = 800$ à 900 kg · m⁻³.

1. Vérifier que le débit volumique sanguin dans l'aorte est $D_v = 8,8 \times 10^{-5}$ m³ · s⁻¹.
2. La valeur v_A de la vitesse du sang dans l'aorte, mesurée lors d'une échographie Doppler, est $0,31$ m · s⁻¹. Calculer le diamètre D de l'aorte.
3. Calculer la valeur v_R de la vitesse dans le rétrécissement.
4. Un souffle est entendu de façon permanente si v_R dépasse 6 m · s⁻¹. Un souffle est-il entendu lors de l'auscultation du patient présentant une sténose aortique congénitale ?

25 Quand le vent souffle

Exploiter des informations ; effectuer des calculs ; mobiliser et organiser ses connaissances.

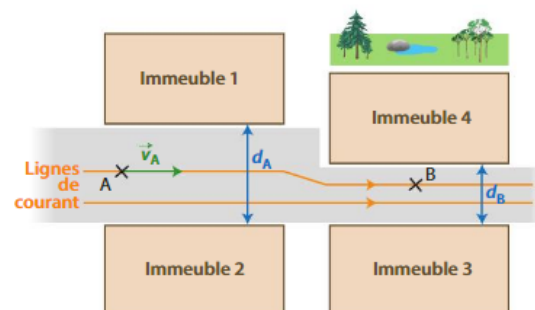


Quatre immeubles de hauteur H sont implantés au bord d'une place comprenant un rétrécissement ; la distance entre les immeubles 1 et 2 est $d_A = 80,0$ m, puis est réduite à $d_B = 60,0$ m entre les immeubles 3 et 4.

La situation est schématisée en vue aérienne ci-après.

La pression à l'intérieur de tous les immeubles est égale à la pression P_A de l'air entre les immeubles 1 et 2. Une vitre peut casser si elle est soumise à des forces pressantes de valeurs très différentes de part et d'autre du vitrage.

Un jour de tempête, la valeur v_B de la vitesse du vent est supérieure à la valeur $v_A = 100$ km · h⁻¹. On peut considérer que dans ces conditions, l'air se comporte comme un fluide incompressible qui s'écoule en régime permanent indépendant du temps.



1. a. Indiquer l'évolution du débit volumique de l'air entre les positions A et B.
- b. Exprimer la valeur v_B de la vitesse entre les bâtiments 3 et 4 en fonction de v_A , d_A et d_B . La calculer.
2. a. Calculer la différence de pression de l'air $P_A - P_B$ de part et d'autre des vitres des immeubles 3 et 4 donnant sur la place.
- b. Schématiser, sans souci d'échelle mais de façon cohérente, les forces pressantes qui s'exercent sur une vitre de l'immeuble 4 donnant sur la place.
- c. Calculer la différence entre les valeurs des forces pressantes qui s'exercent de part et d'autre d'une vitre de surface $S = 6,0$ m² de l'immeuble 4 donnant sur la place.
- d. Déterminer la masse d'un objet dont le poids aurait la même valeur que celle de cette somme de forces pressantes. Conclure.

Données

- On considère que la relation de Bernoulli peut s'appliquer le long d'une ligne de courant d'un fluide incompressible en écoulement permanent indépendant du temps. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho \times v^2 + \rho \times g \times z + P = \text{constante}$$
- Masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}} = 1,2$ kg · m⁻³.

Jet d'eau

| Construire les étapes d'une résolution de problème.

- La hauteur théorique prévue pour le jet d'eau du roi Fahd est-elle celle observée ?

A Un jet d'eau impressionnant

Le jet d'eau du roi Fahd est l'emblème de la ville de Djeddah en Arabie Saoudite. L'eau est éjectée avec une vitesse de valeur $375 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; la hauteur du jet peut atteindre 312 m. L'eau liquide est supposée incompressible.

Données

- La pression atmosphérique est reliée à l'altitude z par :

$$P_{\text{atm}} = P_0 \times e^{-k \times z}$$

avec $P_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $k = 1,14 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

- On considère que la relation de Bernoulli peut s'appliquer le long d'une ligne de courant d'un fluide incompressible comme l'eau en écoulement permanent indépendant du temps. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho \times v^2 + \rho \times g \times z + P = \text{constante}$$

- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Correction

18 Mon beau sapin

1. Le schéma en coupe est donné ci-contre, avec A le centre de masse de la partie immergée.

2. La valeur de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le tronc : $F_p = \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{im}} \times g$.

3. Le tronc est considéré immobile dans le référentiel supposé galiléen lié à l'eau de la rivière. D'après le principe d'inertie, la somme des forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F}_p = \vec{0}.$$

4. La relation $\vec{P} + \vec{F}_p = \vec{0}$ projetée sur un axe vertical orienté vers le haut conduit à $-P + F_p = 0$.

$$F_p = P \text{ soit } \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{im}} \times g = m \times g.$$

Il vient $\rho_{\text{eau}} \times V_{\text{im}} = m$ avec $m = \rho_{\text{bois}} \times V_{\text{bois}}$ et

$$V_{\text{bois}} = \pi \times \frac{D^2}{4} \times \ell.$$

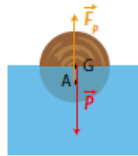
De plus, d'après les données du texte, le tronc est immergé d'une hauteur $h = \frac{D}{2}$. Le volume du tronc immergé est donc la moitié de celui du bois :

$$V_{\text{im}} = \frac{V_{\text{bois}}}{2}.$$

$$\text{Donc } \rho_{\text{eau}} \times \pi \times \frac{D^2}{8} \times \ell = \rho_{\text{bois}} \times \pi \times \frac{D^2}{4} \times \ell;$$

$$\text{soit } \rho_{\text{bois}} = \frac{\rho_{\text{eau}}}{2}.$$

$\rho_{\text{bois}} = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, cette masse volumique est comprise entre 400 et $580 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le bois de ce sapin est sec.



21 Souffle au cœur

1. Débit volumique sanguin dans l'artère :

$$D_{vA} = \frac{V_{\text{fluide}}}{\Delta t} \text{ où } \Delta t = T_{\text{battement}}$$

$$\text{soit } D_{vA} = \frac{75 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \times 70 \text{ pulsations par minute}}{60 \text{ s}}$$

$$\text{soit } D_{vA} = 8,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Le débit volumique dans l'aorte s'exprime aussi par :

$$D_{vA} = S_{\text{aorte}} \times v_A.$$

L'artère étant cylindrique, la surface de sa section est :

$$S_{\text{aorte}} = \pi \times \frac{D^2}{4} \times v_A \text{ et donc } D = 2 \sqrt{\frac{D_{vA}}{\pi \times v_A}};$$

$$\text{soit } D = 2 \sqrt{\frac{8,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \times 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

$$\text{soit } D = 1,9 \times 10^{-2} \text{ m} = 19 \text{ mm}.$$

3. Le sang étant assimilé à un fluide incompressible qui s'écoule en régime permanent indépendant du temps, le débit volumique se conserve : $D_{vA} = D_{vR}$.

$$\pi \times \frac{D^2}{4} \times v_A = \pi \times \frac{d^2}{4} \times v_R$$

$$v_R = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \times v_A \text{ et } d = \frac{D}{5}$$

$$v_R = (5)^2 \times 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_R = 7,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La valeur de la vitesse du sang dans le rétrécissement de l'aorte est $v_R = 7,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4. La valeur de la vitesse du sang dans le rétrécissement de l'aorte dépasse $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; un souffle est entendu.

25 Quand le vent souffle

1.a. Comme l'air s'écoule en régime permanent indépendant du temps et qu'il est supposé incompressible, le débit volumique se conserve :

$$D_{vA} = D_{vB}.$$

b. Le débit volumique s'exprime par $D_v = S \times v$.

On déduit de la question précédente : $S_A \times v_A = S_B \times v_B$.

Or $S_A = d_A \times H$ et $S_B = d_B \times H$ où H est la hauteur des immeubles.

$$d_A \times H \times v_A = d_B \times H \times v_B$$

$$v_B = \frac{d_A}{d_B} \times v_A$$

$$v_B = \frac{80,0 \text{ m}}{60,0 \text{ m}} \times 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_B = 133 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2.a. En régime permanent indépendant du temps, la relation de Bernoulli appliquée le long d'une ligne de courant, entre A et B, au fluide incompressible, s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \times v_A^2 + \rho_{\text{air}} \times g \times z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \times v_B^2 + \rho_{\text{air}} \times g \times z_B + P_B$$

Or $z_A = z_B$ donc la relation précédente devient :

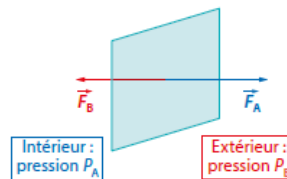
$$\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \times v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \times v_B^2 + P_B.$$

$$\text{Et donc } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \times (v_B^2 - v_A^2).$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \times 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \left(\frac{133}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^2 - \left(\frac{100}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^2.$$

$$P_A - P_B = 356 \text{ Pa}.$$

b. On a $P_A > P_B$ or $P = F \times S$. Pour une surface égale, on a donc $F_A > F_B$.



c. Sur les deux faces d'un vitrage de surface S appartenant à l'immeuble 4, s'exerce donc une différence de forces pressantes de valeur :

$$\Delta F = F_A - F_B = (P_A - P_B) \times S.$$

$$\Delta F = (356 \text{ Pa}) \times 6,0 \text{ m}^2.$$

$$\Delta F = 2,1 \times 10^3 \text{ N}.$$

d. On a $P = \Delta F$ soit $m \times g = \Delta F$ d'où $m = \frac{\Delta F}{g}$; soit :

$$m = \frac{2,1 \times 10^3 \text{ N}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \text{ soit } m = 2,1 \times 10^2 \text{ kg}.$$

Cette force est l'équivalent en valeur, du poids d'une masse de $2,1 \times 10^2 \text{ kg}$. La vitre, si elle n'est pas assez épaisse donc résistante, risque se briser.

En régime permanent indépendant du temps, la relation de Bernoulli appliquée au fluide incompressible, le long d'une ligne de courant entre les positions A et B s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho \times v_A^2 + \rho \times g \times z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho \times v_B^2 + \rho \times g \times z_B + P_B$$

La pression P_A à l'altitude $z_A = 0$ m est :

$$P_A = P_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

La pression P_B à l'altitude $z_B = h$ est donnée par la relation

$$P_B = P_0 \times e^{-k \times h}.$$

Pour $z_B = h = 312$ m,

$$P_B = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} \times e^{(-1,14 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \times 312 \text{ m})}$$

$$P_B = 9,75 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

La valeur de la vitesse de l'eau éjectée en A est $v_A = 375 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

$$\text{soit } v_A = 104 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La valeur de la vitesse de l'eau au sommet du jet a pour valeur $v_B = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En reportant ces données dans la relation de Bernoulli écrite précédemment, on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{eau}} \times v_A^2 + P_A = \rho_{\text{eau}} \times g \times h + P_B$$

$$\text{soit } h = \frac{1}{\rho_{\text{eau}} \times g} \times \left(\frac{1}{2} \rho_{\text{eau}} \times v_A^2 + P_A - P_B \right)$$

$$\text{ou encore } h = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A - P_B}{\rho_{\text{eau}} \times g}$$

$$\text{soit } h = \frac{(104 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \times 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}} + \frac{1,01 \times 10^5 \text{ Pa} - 9,75 \times 10^4 \text{ Pa}}{1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

$$h = 552 \text{ m.}$$

La hauteur déterminée par ce modèle ne tient pas compte des frottements entre l'eau et le fluide.

Elle est bien plus faible en réalité.