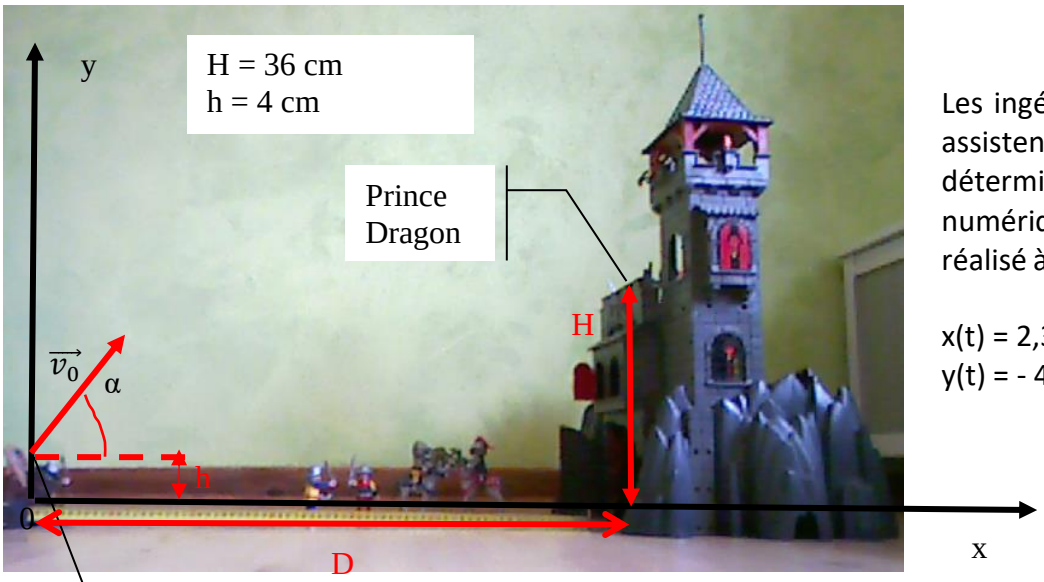
Il faut sauver la princesse Dézécolle

CONTEXTE DU SUJET

Maintenant que vous avez découvert dans l'activité précédente les formes des équations horaires d'un mouvement parabolique et que vous connaissez toute la théorie pour les établir, vous allez pouvoir remplir une mission de la plus haute importance à savoir délivrer la princesse Dézécolle de l'effroyable prince Dragon.
Elle est retenue prisonnière dans son château, pour la libérer il faut donc le faire tomber !
Vous avez en votre possession une catapulte (une réplique de celle de Léonard de Vinci).

A quelle distance du château faut-il positionner la catapulte pour toucher le vil prince Dragon et entraîner sa chute ?

Pour vous aider, voici quelques données issues du champ de bataille :



Catapulte (position initiale du projectile à t = 0)

Les ingénieurs militaires qui vous assistent sont parvenus à déterminer les équations horaires numériques d'un tir parabolique réalisé à l'aide de cette catapulte !

x(t) = 2,34 t
y(t) = - 4,91 t² + 3,84 t + 0,04

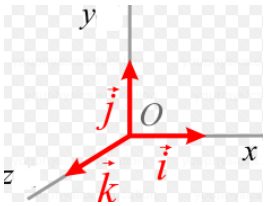
- Intensité de la pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}
- Les frottements de l'air seront négligés.

Vous devrez dans un premier temps établir l'équation de la trajectoire du projectile !

ANALYSER ET RAISONNER

1. Quels sont le référentiel d'étude et le système étudié ?

2. Représenter le vecteur intensité de la pesanteur $\vec{g}$ sur le champ de bataille puis donner ses coordonnées dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) .



3. Donner les coordonnées vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) à l'instant initial t=0 s.

4. Etablir, en fonction de v_0 et α, les coordonnées du vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ (à t = 0).

5. Faire un bilan des forces s'exerçant sur le projectile.

6. Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire le vecteur accélération $\overrightarrow{a(t)}$. Peut-ton dire qu'il s'agit d'une chute libre ?

7. Ecrire les coordonnées $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ de $\overrightarrow{a(t)}$ en fonction de g.

8. Donner l'expression des coordonnées $v_x(t)$, $v_y(t)$, et $v_z(t)$, du vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$. Pour vous aider, un début de résolution incomplète vous est proposé :

9. Donner l'expression des coordonnées x(t), y(t) et z(t) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à partir des coordonnées du vecteur vitesse en vous appuyant sur ce qui a été fait précédemment. Pourquoi peut-on dire qu'à chaque instant, le mouvement est contenu dans le plan de tir ?

10. A l'aide des équations horaires trouvées et des équations numériques fournies par les ingénieurs, déterminer la valeur de la vitesse initiale v_0 et de l'angle de tir α.

11. Déterminer l'équation y=f(x) de la trajectoire.

VALIDER

A l'aide de l'équation de la trajectoire, répondre à la problématique.