KEPLER BRISE LE CERCLE

CONTEXTE DU SUJET

Johannes Kepler, professeur de mathématiques danois eut le grand mérite d'exploiter les observation minutieuses à l'œil nu, principalement de la planète Mars, léguées par Tycho Brahé, dont il fut l'assistant.
Il établit ses deux premières lois en 1609 et mit ainsi fin au dogme d'Aristote selon lequel les objets célestes réalisaient l'ordre parfait par un mouvement circulaire uniforme, et que Copernic et Galilée n'avaient pas remis en question.
En 1619, il parvient à établir sa 3^{e} loi qui s'avèrera cruciale pour les travaux de Newton.
Ces trois lois sont descriptives : elles répondent précisément au « **comment » mais pas au « pourquoi »**. Il faudra pour cela attendre Newton !

L'objectif de cette activité est de retrouver puis de vérifier les lois de Kepler à partir de données orbitales d'une planète du système solaire.

PARTIE 1 : La loi de la gravitation

Comment expliquer le mouvement des planètes autour du Soleil ? Quelles sont les caractéristiques d'un tel mouvement ?

QUELQUES DOCUMENTS

1. La loi de la gravitation

La loi de la gravitation est telle que tout corps qui approche trois fois plus du centre de son mouvement gravite neuf fois davantage ; que, s'il s'éloigne trois fois plus, il gravitera neuf fois moins ; et que s'il s'éloigne cent fois plus, il gravitera dix mille fois moins.

Un corps se mouvant autour d'un centre pèse donc en raison inverse du carré de sa distance actuelle au centre, comme aussi en raison directe de sa masse ; or, il est démontré que c'est la gravitation qui le fait tourner autour de ce centre, puisque, sans cette gravitation, il s'en éloignerait en décrivant une tangente. Cette gravitation agira donc plus fortement sur un mobile qui tournera plus vite autour de ce centre ; et plus ce mobile sera éloigné, plus il tournera lentement, car alors il pèsera bien moins.

D'après Voltaire, *Éléments de la philosophie de Newton*, 1738.

2. L'orbite de la Terre

L'orbite de la Terre autour du Soleil n'est pas un cercle, mais une ellipse. Un cercle est donné par son centre C et son rayon r (Fig. 1 ⓐ), tandis qu'une ellipse est donnée par son centre O, son demi-grand axe a, ses deux foyers F et F′, et son excentricité $e = c/a$, où $c = OF = OF'$ (Fig. 1 ⓑ). Le Soleil occupe l'un des deux foyers de cette ellipse. Vers le 2 janvier, la Terre est le plus près du Soleil (périhélie) à une distance d'environ 147 millions de kilomètres, tandis que, vers le 2 juillet, elle se trouve le plus loin du Soleil (aphélie), à une distance d'environ 152 millions de kilomètres.

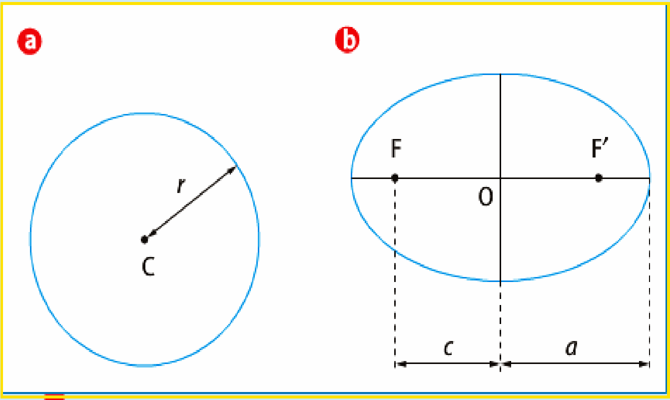


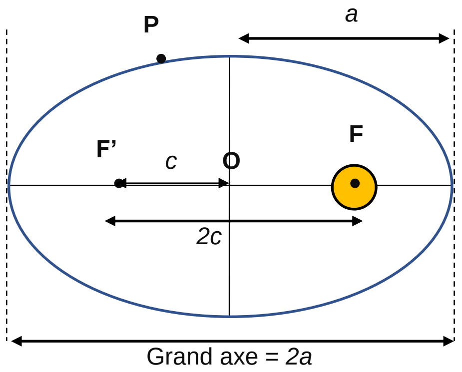
Fig. 1 ⓐ Cercle de centre C et de rayon r ; ⓑ ellipse de centre O, de demi-grand axe a et de foyers F et F′.

3. La Terre et Neptune

Voici les caractéristiques des orbites de la Terre et de Neptune.

Planète	Excentricité e	Demi-grand axe a ($\times 10^6$ km)	Période de révolution T (années)
Terre	0,017	150	1,0
Neptune	0,009	4 488	$1,7 \times 10^2$

Document 2 : Caractéristiques d'une ellipse



- Une ellipse est caractérisée par :
  - des points particuliers
    - son **centre O**
    - ses **foyers F et F'** à égales distances du centre O
  - des valeurs particulières
    - **a =** longueur du **demi grand axe**
    - c = distance entre le centre O et un foyer
    - **e = excentricité** = $\frac{c}{a}$: nombre décimal compris entre 0 et 1 qui caractérise l'aplanissement par rapport à un cercle.

- L'ellipse est l'ensemble des points P du plan tels que PF + PF' = 2a

Remarque :
Le cercle est une ellipse particulière où les points O, F et F' sont confondus, l'excentricité e est donc nulle, la longueur du demi-grand axe a est égal au rayon du cercle R.

S'APPROPRIER

1. Quel scientifique est à l'origine de la loi de gravitation ?

2. A l'aide du texte de Voltaire, retrouver l'expression de l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle $F_{S/T}$ qui modélise l'action mécanique du Soleil sur la Terre. Préciser les noms des grandeurs intervenant dans cette relation, ainsi que leurs unités.

3. D'après le texte de Voltaire, que se passerait-il pour la Terre sans l'existence de cette action mécanique ? Est-ce compatible avec le principe d'inertie ? Justifier.

4. Neptune tourne-t-elle plus vite ou moins vite que la Terre autour du Soleil ?

5. Que devient une ellipse de demi-grand axe a lorsque son excentricité e est nulle ?

6. Que peut-on dire des excentricités de la Terre et de Neptune ? Justifier alors l'approximation des trajectoires circulaires.

PARTIE 2 : Les lois de Kepler

QUELQUES DOCUMENTS

Histoire et vision du système solaire

Claude Ptolémée (IIe siècle après J.-C.) fut le premier à décrire avec précision le mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes autour de la Terre, considérée alors comme le centre du monde, par une combinaison de mouvements circulaires uniformes […].

Trois siècles plus tard, Nicolas Copernic (1473-1543), astronome polonais, propose son modèle héliocentrique du système solaire : à l'instar de Ptolémée, l'astronome polonais décrit le mouvement des planètes comme une combinaison de mouvements circulaires mais son système – dans lequel le Soleil a remplacé la Terre au centre du monde – est finalement plus compliqué que celui de Ptolémée.

Fig. 1 Johannes Kepler.

Les observations très précises de la position de Mars faites par son maître et astronome danois Tycho Brahe (1546-1601) convainquent Johannes Kepler (1571-1630), astronome allemand (**Fig. 1**), que l'orbite de la planète rouge ne peut être décrite ni par un cercle ni par une combinaison de cercles, mais qu'elle est elliptique, le Soleil occupant un des foyers de l'ellipse. Il publie ce résultat – qui constitue la première loi de Kepler – en 1609 dans son *Astronomia nova* (*Astronomie nouvelle*).

Puis, il généralise cette loi à d'autres planètes dans ses *Epitome astronomiae copernicanae* de 1618-1621, qui contiennent la première description correcte du système solaire et dans lesquelles est correctement formulée la deuxième loi de Kepler : les aires balayées en des temps égaux par la droite joignant la planète au Soleil sont égales. La dernière loi – le carré de la période de révolution des planètes est proportionnel au cube de leur distance moyenne au Soleil – est énoncée en 1619 dans *Harmonice mundi* (*L'Harmonie du monde*).

James Lequeux, extraits de « Tables pruténiques » et « Lois de Kepler », *Encyclopædia Universalis*.

Les lunes galiléennes

Les lunes galiléennes, Io, Europe, Ganymède et Callisto (**Fig. 2**), sont quatre satellites naturels de Jupiter parmi les 63 connus. Ils se nomment ainsi car ils ont été découverts par Galilée (1564-1642) en 1610. Leurs trajectoires peuvent être considérées comme circulaires (**Fig. 3**).

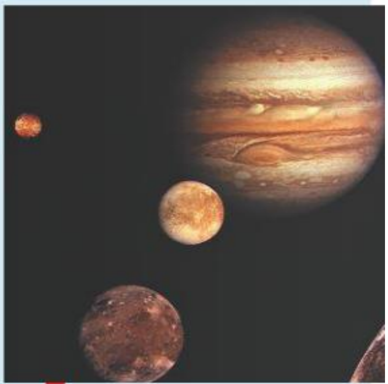


Fig. 2 Les lunes galiléennes.

Nom	Rayon r de l'orbite quasi circulaire (km)	Période de révolution T (j)
Io	$4{,}22 \times 10^5$	1,77
Europe	$6{,}71 \times 10^5$	3,55
Ganymède	[illegible]	7,15
Callisto	$1{,}88 \times 10^6$	[illegible]

Fig. 3 Rayons et périodes des lunes galiléennes.

<u>Document 2 : Définitions astronomiques</u>

- **Aphélie :** point de la trajectoire d'une planète le plus éloigné du soleil *(la distance entre le soleil et l'aphélie est notée r_a).*
- **Périhélie :** point de la trajectoire d'une planète le plus proche du soleil *(la distance entre le soleil et la périhélie est notée r_p).*

<u>Document 3 : Données planétaires</u>

Planète	a (U.A)	T (an)	e
Mercure	0,387	0,240	0,206
Vénus	0,723	0,615	0,007
Terre	1,00	1,00	0,017
Mars	1,52	1,88	0,093
Jupiter	5,20	11,9	0,048
Saturne	9,54	29,4	0,054
Uranus	19,2	84,0	0,046
Neptune	30,0	165	0,010

U.A : l'unité astronomique, elle correspond à la distance moyenne entre la Terre et le soleil soit 150 millions de km.

ANALYSER

Enoncer les trois lois de Kepler décrites dans le document 1.

PREMIERE LOI DE KEPLER

RÉALISER

- Ouvrir le fichier python « Première loi de Kepler.élève », compléter les 3 lignes en pointillés en adaptant à la planète Mercure et lancer le programme.
- Faire les modifications nécessaires pour faire apparaître les trajectoires d'autres planètes du système solaire.

ANALYSER

1. La forme des trajectoire visualisées est-elle en accord avec la 1ère loi de Kepler ? Faire un schéma en indiquant la position de la planète, du Soleil et des deux points cités dans le doc 3.

2. Commenter les valeurs d'excentricité obtenues pour l'ensemble des planètes du tableau et les formes des trajectoires des planètes.

3. Quelle approximation peut donc être faite concernant la trajectoire de la plupart des planètes du système solaire ?

DEUXIEME LOI DE KEPLER : LOI DES AIRES

Le segment de droite reliant le Soleil à la planète balaie, pendant des durées égales, des surfaces égales.

RÉALISER

- Consulter l'animation **« Képler.swf »**
- Ne pas modifier les paramètres de l'orbite *(Orbit settings)*

- Sélectionner l'onglet *Kepler's 2nd law*.
- Cliquer sur *start sweeping* : une surface balayée par le segment Soleil-Planète se colore.
- Cliquer de nouveau sur *start sweeping* lorsque la planète se trouve en différents points de l'ellipse.

ANALYSER

1. Quelles sont les points communs à chacune des surfaces colorées affichées ?

2. Le mouvement de la planète est-il uniforme ? Préciser où semblent se situer les extrémums de vitesse.

3. Exécuter le programme python « Deuxième loi de Képler » et vérifier vos affirmations.

4. Montrer que l'énoncé de la 2ème loi de Kepler permet de confirmer ses observations.

TROISIEME LOI DE KEPLER

RÉALISER

➔ Construire la représentation graphique de l'évolution de T^2 en fonction de a^3 pour les planètes du système solaire citées au document 4.

(**ATTENTION !!!!** Vous prendrez soin de convertir T en secondes et a en m).

ANALYSER

[redacted] La 3ème loi de Kepler vous semble-t-elle validée dans le cas des planètes du système solaire ? Justifier.

Grâce à ses travaux sur la gravitation universelle, Newton va réussir à expliciter la constante qui figure dans la 3ème loi de Kepler en démontrant que :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M} \quad (1)$$

G = constante de gravitation Universelle = $6{,}67 \times 10^{-11}$ SI
M = masse de l'astre attracteur en kg.

2. Estimer la masse M du soleil à partir du graphique tracé précédemment.

VALIDER

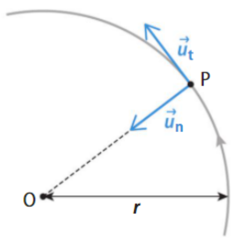
1. Dans le cas des lunes galiléennes citées au document 1, quel est l'astre attracteur ?

2. Retrouver les valeurs qui ont été malencontreusement tâchées par votre professeur du document 1.

➔ Défi à relever ! Retrouver l'expression (1) précédente établie par Newton à partir de l'application de sa deuxième loi dans le repère de Frenet. Vous montrerez au passage pourquoi le mouvement peut être considéré comme uniforme (dans le cas d'un mouvement circulaire a = R)

<u>Rappel : Repère de Frenet pour un mouvement circulaire</u>

– Origine : un point P en mouvement circulaire de rayon r autour d'un point O fixe.
– Vecteurs unitaires $(\vec{u}_t\ ;\ \vec{u}_n)$ dans le plan de la trajectoire.
– $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire, de même sens.
– $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_t$, vers le centre de la trajectoire.



Doc. 1 Les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ du repère de Frenet pour un mouvement circulaire.

- Vitesse de P dans le repère de Frenet :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

- Accélération de P dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$