Bac 2021 Métropole EXERCICE B - UN SYSTÈME DE DÉTECTION DE PASSAGER (5 pts)
Correction **Mot-clé : modèle du circuit RC série**

(Barème indicatif sur 6,75pts → 5 pts)

1. Étude du capteur de pression capacitif « artisanal »

1.1.(0,5pt) On emploie l'adjectif capacitif pour indiquer que les feuilles d'aluminium constituent un réservoir de charges électriques de signes opposés.

1.2. (0,5pt) La tension U_{AB} est positive ainsi la feuille A porte des charges électriques positives alors $Q_A = C.U_{AB}$.
Tandis que $Q_B = -C.U_{AB}$.

1.3. (0,75 pt) Lorsqu'un objet est posé sur le condensateur, les feuilles d'aluminium, ainsi que la feuille de papier isolant qui les sépare, sont déformées.

On peut faire plusieurs hypothèses, en se basant sur la relation $C = \frac{\varepsilon.S}{e}$.

- La surface S en regard des feuilles d'aluminium est modifiée. Mais l'épaisseur e de la feuille ainsi que la constante ε n'ont pas changé.

Si S augmente alors C augmente, si S diminue alors C diminue.

- L'épaisseur e de la feuille de papier diminue. Mais ni la surface S , ni la constante ε n'ont changé.

Si e diminue alors C augmente.

Remarques : plusieurs réponses sont possibles, on attend avant tout un raisonnement argumenté.
La lecture de la question 3.2. montrera que l'hypothèse sur la diminution de e était la bonne.

2. Modélisation du circuit de la chaine de mesure

2.1. (0,25pt) D'après la loi des mailles : $0 = u_R + u_C$ *Citer les lois utilisées.*
(0,25pt) D'après la loi d'Ohm $u_R = R.i.$

$$0 = R.i + u_C$$

(0,25pt) Par définition $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, or $q(t) = C.u_C(t)$ avec C constante ainsi $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$.

$0 = R.C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$.

On peut mettre en forme l'équation différentielle comme en mathématiques soit sous la forme y' = a.y + b. Pour cela, on divise par $R.C$.

$$0 = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{R.C}.u_C(t)$$

(0,25pt) En posant $R.C = \tau$, on obtient $0 = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C(t)$.

2.2. Méthode 1 : Si $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de l'équation différentielle alors on doit vérifier l'égalité $0 = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C(t)$.

(0,25pt) Exprimons $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C(t) = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}.A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

(0,25pt) On constate qu'effectivement $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C(t) = 0$, la solution proposée convient.

La solution proposée donne à la date $t = 0$, $u_C(t=0) = A.e^{-\frac{0}{\tau}} = A$.
Or à la date $t = 0$ s, le condensateur est chargé et $u_C(0) = E$.
(0,25pt) Donc $A = E$.

La solution est $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Méthode 2 : $0 = \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C(t)$ s'écrit $\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}.u_C(t)$ soit de la forme *y'* = *a*.*y* qui admet pour solution *y* = *A*.e^{ax}, soit $u_C(t) = A.e^{-\frac{1}{\tau}.t}$.

On détermine *A* avec les conditions initiales, à *t* = 0 s le condensateur est chargé alors $u_C(t) = E$.

$u_C(0) = A.e^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = E$ donc *A* = *E*. La solution est bien $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$.

2.3. (0,25pt) Calculons $u_C(t = 5\,\tau) = E.e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E.e^{-5}$ = E×6,7×10^{-3} = $E \times \frac{0{,}67}{100}$.

(0,25pt) La tension aux bornes du condensateur est inférieure à 1% de sa valeur initiale, on peut considérer que le condensateur est déchargé.

3. Test expérimental de la chaîne de mesure

3.1. (0,25) On doit déterminer le temps caractéristique τ de la décharge du condensateur.

On trace la tangente à la courbe représentative de u_C à la date t = 0 s. Elle coupe l'axe des temps, à la date $t = \tau$.

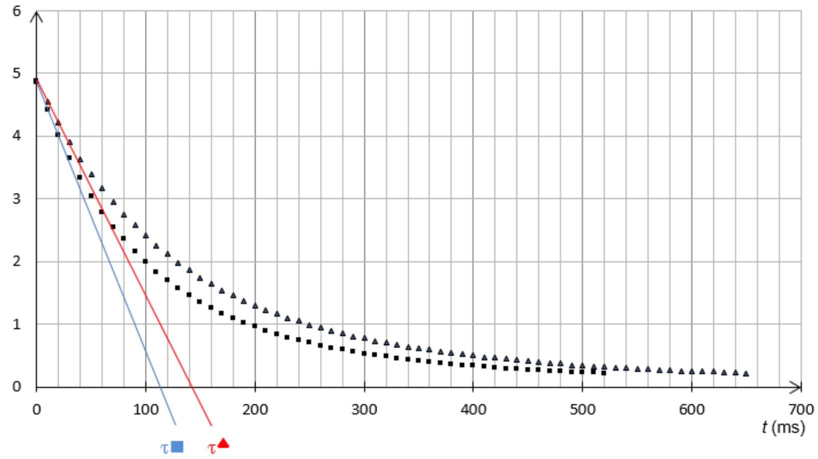
(0,25) On obtient τ ■ < τ ▲.

Comme τ = *R*.*C* et que *R* = constante,

(0,25) alors *C* ■ < *C* ▲.

On considère qu'avec pression, seule l'épaisseur *e* de la feuille a diminué (voir 1.3.).

Ainsi avec pression *C* augmente.



(0,25)

La courbe avec ▲ est celle qui correspond au dispositif avec pression.

3.2. (0,25) $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta e}{e}$ donc $\Delta e = \frac{\Delta C}{C}.e$.

Il faut déterminer les capacités pour les deux situations et donc les temps caractéristiques.

La méthode de la tangente à l'origine est peu précise.

On va utiliser la méthode des « 37% ».

Pour *t* = τ, $u_C(\tau) = 0{,}37.E$. On cherche l'abscisse du point d'ordonnée 0,37.E.

$u_C(\tau) = 0{,}37 \times 5$ = 1,85 V. Voir courbe ci-après.

(0,25) $\tau = R.C$ donc *C* = $\frac{\tau}{R}$

C est la capacité du condensateur sans pression donc elle correspond au plus petit temps caractéristique τ■ = 110 ms

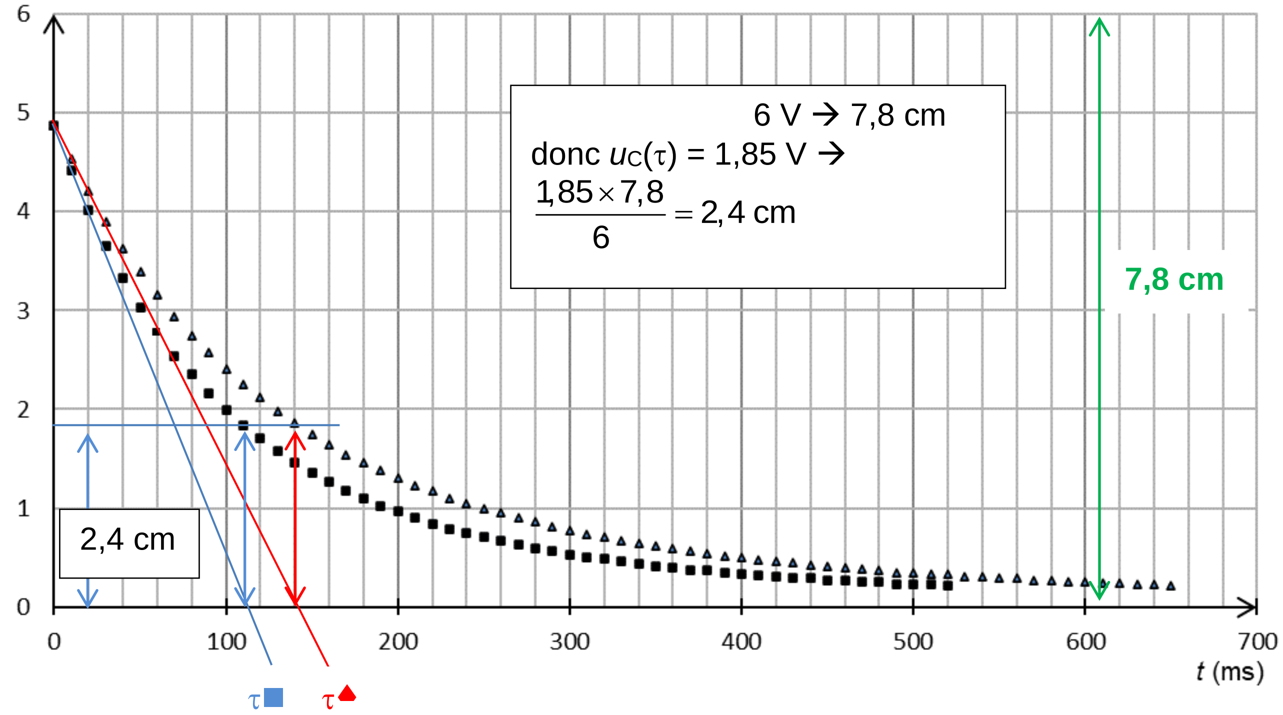
(0,25) *C* = $\frac{110 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}} = 1{,}1 \times 10^{-8}$ F $= 11 \times 10^{-9}$ F = 11 nF

De même ΔC = $\frac{\Delta\tau}{R}$

(0,25) Δ*C* = $\frac{(140 - 110) \times 10^{-3}}{10 \times 10^{6}}$ = 3,0 ×10^{-9} F = **3,0 nF**

(0,25) Finalement $\Delta e = \frac{3{,}0}{11} \times 1{,}0 \times 10^{-4}$ = 2,7×10^{-5} m ou 0,27×10^{-4} m.

Ce dispositif est capable de mesurer des variations d'épaisseur très petite.



(0,5) On trouve τ▲ = 140 ms et τ■ = 110 ms.